ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σελ. σχολ. βιβλ. 135

Α2. $\alpha \to \Lambda$

Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$ τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, ενώ η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

Α3. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 73

Α4. $\alpha \to \Lambda$,$\beta \to \Sigma$,$\gamma \to \Lambda$,$\delta \to \Sigma$,$\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$f(x)=\ln x$, $D_f=(0,+\infty)$

$g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $D_g=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$$Df\circ g=\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases}=\begin{cases} x\neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x}>0 \end{cases}=\begin{cases} x\neq 1 \\ x(1-x)>0 \end{cases}=(0,1).$$

Άρα $Df\circ g=(0,1)$ με τύπο $h(x)=(f\circ g)_{(x)}=\ln\dfrac{x}{1-x}$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Β2.

$$h'(x)=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{(x')\cdot(1-x)-x\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-x-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1-x+x}{1-x}=$$

$$=\frac{1}{x-(1-x)}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,1)$$

Άρα $h(x)$ γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, άρα και αντιστρέψιμη.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=+\infty$

Η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to 0^+}h(x),\lim\limits_{x\to 1^-}h(x)\right)$, άρα $(-\infty,+\infty)$. Θέτω :

$$y = h(x)$$
$$y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$
$$e^y = \frac{x}{1-x}$$
$$(1-x)\cdot e^y = x$$
$$e^y - x\cdot e^y = x$$
$$e^y = x + x\cdot e^y$$
$$(e^y+1)\cdot x = e^y$$
$$x = \frac{e^y}{e^y+1}$$
$$h^{-1}(y) = \frac{e^y}{e^y+1}$$

Άρα $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, με $D_{h^{-1}} = (-\infty, +\infty)$

B3.

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\varphi'(x) = \frac{e^x\cdot(e^x+1) - e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x)^2 + e^x - (e^x)^2}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

Άρα η φ(x) είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η φ(x) δεν έχει ακρότατα.

$$\varphi''(x) = \frac{e^x\cdot(e^x+1)^2 - e^x\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4} =$$

$$= \frac{e^x(e^x+1)\left[e^x+1-2e^x\right]}{(e^x+1)^4} =$$

$$= \frac{e^x(e^x+1)(1-e^x)}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$$\varphi''_{(x)} = 0 \Leftrightarrow 1-e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

για $x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow -e^x < 1 \Leftrightarrow 1-e^x < 0$

για $x < 0 \Leftrightarrow 1-e^x > 0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
φ''	$+$	0	$-$
φ			

Άρα η φ στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty, 0]$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, \varphi_{(0)})$ όπου $\varphi_{(0)} = \dfrac{e^0}{e^0+1} = \dfrac{1}{2}$. Άρα $A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

ηΒ4.

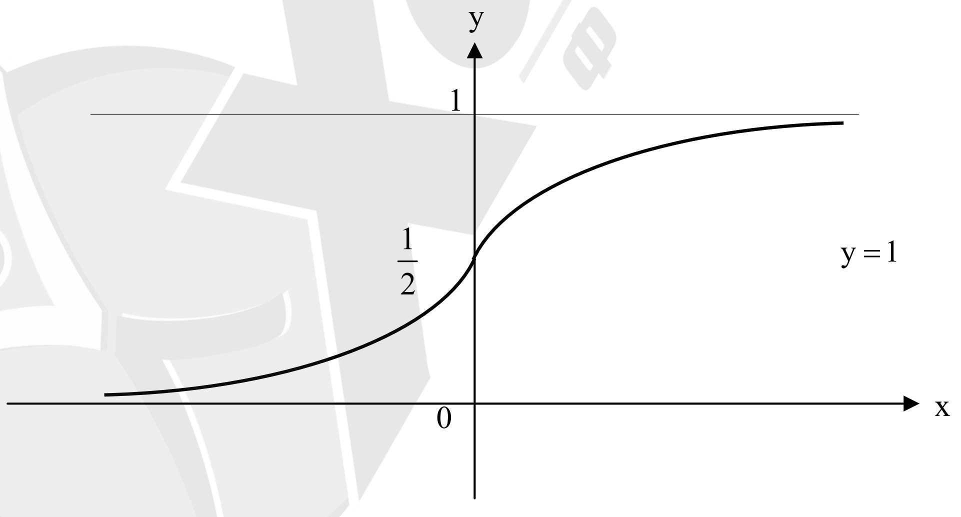
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

Επομένως η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{0}{1} = 0$$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f'	$+$		$+$
f			



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x) = -\eta\mu x$

$f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$

Η εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο της $(x_0, f(x_0))$,

θα είναι $\varepsilon:\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ ανήκει στην (ε), άρα

$$-\frac{\pi}{2} - (-\eta\mu x_0) = (-\sigma\upsilon\nu x_0)\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 + \sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = 0$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Παρατηρούμε ότι $g(0) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\frac{\pi}{2} + 0 + 1\cdot\frac{\pi}{2} = 0$

και $g(\pi) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu\pi + \sigma\upsilon\nu\pi\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = -\frac{\pi}{2} + 0 - 1\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$

$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\eta\mu x$	$-$		$-$
$\frac{\pi}{2} - x$	$+$	0	$-$
g'	$-$		$+$
g	↘		↗

Άρα στο $[0, \pi]$, η g μηδενίζεται μόνο στο g και στο π.

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $(0, f(0))$ και $(\pi, f(\pi))$

Άρα $\varepsilon_1:\ y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - (-\eta\mu 0) = (-\sigma\upsilon\nu 0)\cdot x$

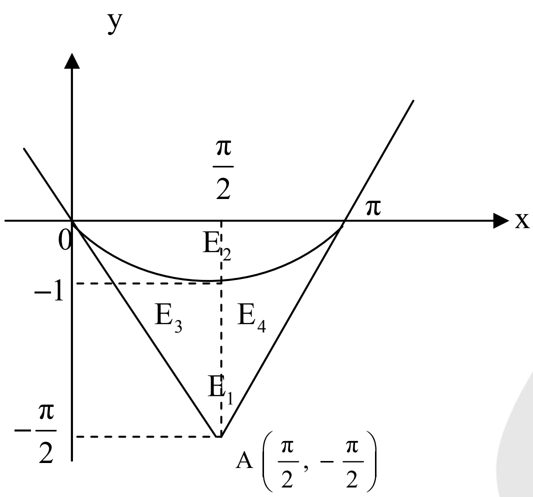
$y - 0 = -1\cdot x$

$\varepsilon_1:\ y = -x$

και $\varepsilon_2:\ y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi)$

$$y-(-\eta\mu\pi)=(-\sigma\upsilon\nu\pi)(x-\pi)$$
$$y-0=1\cdot(x-\pi)$$
$$\varepsilon_2 : y=x-\pi$$

Γ2.



$$E_1=E_3+E_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(f(x)-\varepsilon_1\big)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\big(f(x)-\varepsilon_2\big)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\eta\mu x+x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\eta\mu x-x+\pi)dx=$$

$$=\left[\sigma\upsilon\nu x+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\sigma\upsilon\nu x-\frac{x^2}{2}+\pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}-\left(\sigma\upsilon\nu 0+\frac{0^2}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\pi-\frac{\pi^2}{2}+\pi\cdot\pi-\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+\pi\cdot\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=0+\frac{\pi^2}{8}-2-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2-16-4\pi^2+8\pi^2+\pi^2-4\pi^2}{8}=\frac{2\pi^2-16}{8}$$

$$E_2=-\int_0^{\pi}f(x)dx=-\int_0^{\pi}(-\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}-\sigma\upsilon\nu\pi-(-\sigma\upsilon\nu 0)=-(-1)+1=2$$

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{2\pi^2+16}{8}}{2}=\frac{2\pi^2+16}{16}=\frac{2\pi^2}{16}-\frac{16}{16}=\frac{\pi^2}{8}-1$$

Γ3.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[\big(f(x)+x\big)\frac{1}{f(x)-x+\pi}\right]=\ell$$

- $\lim\limits_{x\to\pi}\big(f(x)+x\big)=\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x+x)=-\eta\mu\pi+\pi=\pi$

- $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}$ ισχύει $f(x)-(x-\pi)>0 \Leftrightarrow f(x)-x+\pi>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$

και $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)-x+\pi\right)=\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x-x+\pi\right)=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$

Επομένως $\ell=\pi(+\infty)=+\infty$

Γ4.

Ξέρουμε ότι $f(x)>x-\pi$ για κάθε $x\in(1,e)$, άρα για $x>0$: $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{x-\pi}{x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{x-\pi}{x}>0$

Άρα

$$\int_1^e\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{x-\pi}{x}\right)dx>0\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx-\int_1^e\frac{x-\pi}{x}dx>0\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\frac{x-\pi}{x}dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left[x-\ln x\right]_1^e\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-\ln e-(1-\pi\ln 1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-\pi\cdot 1-1+0\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{0^4}=0$, $f(0)=e^o\cdot\eta\mu 0=1\cdot0=0=\lim\limits_{x\to o^+}f(x)$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο $x_o=0$ (1)

Η f συνεχής για κάθε $x\in(o,\ \pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων:

$(e^x$ εκθετική$)$, ημx (τριγωνομετρική) (2)

Η f συνεχής στο $(-1,0)$ ως άρρητη (3)

$\xrightarrow{(1),(2),(3)}$ η f συνεχής στο $[-1,\pi]$

Ως γνωστόν τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του $[-1,\pi]$ για τα οποία

i. η f' μηδενίζεται
ii. δεν παραγωγίζεται

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ ως άρρητη με

$$f'_{(x)}=\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left(\sqrt[3]{|x|^4}\right)'=\left(|x|^{4/3}\right)'=\left((-x)^{4/3}\right)'=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}\cdot(-x)'$$

$$=\frac{4}{3}\cdot(-x)^{\frac{1}{3}}\cdot(-1)=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}\quad(4)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως γινόμενο παραγόντων

με $f'(x)=\left(e^{x}\cdot \eta\mu x\right)'=\left(e^{x}\right)'\eta\mu x+e^{x}\left(\eta\mu x\right)'=e^{x}\cdot\eta\mu x+e^{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x$

$e^{x}\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)\quad (5)$.

Η $f'(x)=\dfrac{-4}{3\cdot\sqrt[3]{-x}}\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,0)$

Η $f'(x)=e^{x}\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\ \left(e^{x}>0\right)$

$\Leftrightarrow -\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{4}\Leftrightarrow$

$x=\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_1=\dfrac{3\pi}{4}\in(0,\pi)$ κρίσιμο σημείο

Για $x<0\Rightarrow\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-0}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{-\sqrt[3]{(-x)^3}}=-\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{-x^3}}=-\sqrt[3]{-x}\Rightarrow$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{-x}\right)=0$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x}\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=e^{0}\cdot 1=1$

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0=0$

Άρα το $x_2=0\in(-1,\pi)$ κρίσιμο σημείο

Δ2. $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} & x\in[-1,0)\\ e^{x}\cdot\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right), & x\in(0,\pi]\end{cases}$

i) Η f συνεχής στο $[-1,\pi]$

ii) $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[-1,0)\Rightarrow$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$

iii) Έστω $f'(x)=0$ (για $x\in(0,\pi]$) $\Rightarrow e^{x}\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}$

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
f'	$-$	$+$	$-$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		Τ.Ε.	Τ.Μ.	

Για $x=\frac{\pi}{2}\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ell^{\pi/2}\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)=e^{\pi/2}(1+0)>0$

$\Rightarrow f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ διότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο, καθ΄ όσον συνεχής και δεν παρεμβάλλονται άλλες ρίζες.

Για $x=\frac{5\pi}{6}\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)\Rightarrow f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=e^{5\pi/6}\left(\eta\mu\frac{5\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}\right)=e^{5\pi/6}\left(\eta\mu\frac{5\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}\right)$

$=e^{5\pi/6}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0\Rightarrow f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

Για τον ίδιο λόγο $\Rightarrow$ η f γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$,

η f γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

Η f συνεχής $[-1,\pi]\Rightarrow$

$f(A)=f\left([-1,\pi]\right)=[f(0),f(-1)]\cup\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]\cup\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$f(0)=0, f(-1), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{4}=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(\pi)=\ell^{\pi}\cdot\eta\mu\pi=e^{\pi}\cdot 0=0$ άρα

$f(A)=[0,1]\cup\left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Έστω $\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\sqrt{2}}{2}>1\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\sqrt{2}>2\Leftrightarrow\left(e^{3\pi/4}\right)^2\cdot 2>4$

$\Leftrightarrow\left(e^{3\pi/4}\right)^2>2\Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}}>2$ το οποίο και ισχύει, διότι

$\frac{3\pi}{2}>1\xrightarrow{e^x\nearrow}e^{\frac{3\pi}{2}}>e^1\Rightarrow e^{\frac{3\pi}{2}}>e>2$

Άρα $f(A)=\left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Δ3.

$E=\int_0^{\pi}\left|f(x)-9(x)\right|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\ \eta\mu x-e^{5x}\right|dx=$

Έστω $h(x)=e^x\ \eta\mu x-e^{5x}$ για $x\in[0,\pi]$

$h'(x)=e^x\ \eta\mu x+e^x\ \sigma\upsilon\nu x-5e^{5x}=e^x\ (\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)-5e^{5x}$

Αλλά $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=2\Rightarrow e^x\ (\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\leq 2e^x \Leftrightarrow$

$e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)-5e^{5x}\leq 2e^x-5e^{5x}<0 \quad h'(x)<0$

και $h(x)[0,\pi]$

για $0\leq x\leq\pi\Leftrightarrow h(0)\geq h(x_1)\geq h(\pi)\Leftrightarrow$

$h(\pi)\leq h(x)\leq h(0)$, όπου $h(\pi)=e^{\pi}\eta\mu\pi-e^{5\pi}=-e^{5\pi}$

$h(0)=e^0\eta\mu 0-e^0=-1$

Άρα $-e^{5\pi}\leq h(x)\leq -1$

Άρα $h(x)<0$

$E=\int_0^{\pi}-\left(e^x\ \eta\mu x-e^{5x}\right)dx=-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x+\int_0^{\pi}e^{5x}dx$

$E_1=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x\,dx+\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\eta\mu x\,dx=\left[e^x\ \eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx$

$=\cancel{e^{\pi}\eta\mu\pi}-\cancel{e^0\eta\mu 0}-\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x\,dx$

$=-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\left(-\eta\mu x\right)dx=$

$-\left[e^{\pi}\ \sigma\upsilon\nu\pi-e^0\sigma\upsilon\nu 0\right]-I_1\Leftrightarrow 2I=e^{\pi}+1\Leftrightarrow I_1=\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

$I_2\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\dfrac{1}{5}\int_0^{\pi}\left(e^{5x}\right)'dx=\dfrac{1}{5}\left[e^{5x}\right]_0^{\pi}=$

$\dfrac{1}{5}=\left(e^{5\pi}-e^0\right)=\dfrac{1}{5}e^{5\pi}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{e^{5\pi}-1}{5}$

Άρα $E=-I_1+I_2=-\dfrac{e^{5\pi}-1}{5}$

Δ4.

$16e^{\frac{-3\pi}{4}}\ f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$

$e^{-\frac{3\pi}{4}}\left[16f(x)-(4x-3\pi)^2\right]=8\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$16f(x)-(4x-3\pi)^2=8e^{-\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$f(x)=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{(4x-3\pi)^2}{16}\Leftrightarrow$

$f(x)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$

Παρατηρώ ότι μία προφανή ρίζα είναι η $x=\frac{3\pi}{4}$ όπου $\frac{3\pi}{4}\in[0,\pi]$

Επίσης ισχύει:

$f[(-1,\pi)]\to\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

όπου $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}=f\max$

Η συνάρτηση $f(x)$ δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη της μέγιστης $f\max$

$f(x)\le f\max$

Επομένως στην εξίσωση $f(x)=f\max+\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$

πρέπει το $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0 \quad Ux\in[-1,\pi]$

Άρα $x=\frac{3\pi}{4}$ μοναδική λύση

Παρατηρούμε ότι για

$x\in[-1,0]$ ισχύει $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ όπου

$0\le f(x)\le 1$ επομένως $(1)\Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2\le 1\Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\le 1-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$ αδύνατο δίνει $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1$

Άρα η f έχει μοναδική λύση την $x=\frac{3\pi}{4}$

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές