ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σελ. σχολ. βιβλ. 262
Α2. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 141
Α3. Θεωρία σελ. σχολ. βιβλ. 246-247
Α4. Λ, Σ, Λ, Σ, Σ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1},\ x\in R$

Β1..

Η f παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της R (διότι $x^2+1\geq 1>0$ άρα $x^2+1\neq 0$ για κάθε $x\in R$)

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2)'\cdot(x^2+1)-(x^2+1)'\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

(Η f πράξεις παραγωγισίμων άρα παραγωγίσιμη)

Έστω $f'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}>0\Leftrightarrow 2x>0\Leftrightarrow x>0$

Έστω $f'(x)<0\Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}<0\Leftrightarrow 2x<0\Leftrightarrow x<0$

Έστω $f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(0)$ = ολικό ελάχιστο $=\dfrac{0^2}{0^2+1}=\dfrac{0}{1}=0$

Β2.

Η f' παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγισίμων με $f''(x)=(f'(x))'=\left(\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=$

$$\frac{(2x)'.(x^2+1)^2-2x\left[(x^2+1)^2\right]'}{\left((x^2+1)^2\right)^2}=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}=$$

$$\frac{2\left(x^2+1\right)^2-4x\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left[2\left(x^2+1\right)-8x^2\right]}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x^2+2-8x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}\quad \forall x\in R$$

Έστω $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}>0 \Leftrightarrow 2-6x^2>0$ διότι $\left[\left(x^2+1\right)^3>0\right]$

$$-6x^2>-2 \Leftrightarrow x^2<\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow |x|<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Έστω $f''(x)<0 \Leftrightarrow$ … … $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Έστω $f''(x)=0 \Leftrightarrow$ … … $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘		↗		↗
		Σ.Κ.		Ο.Ε.		Σ.Κ.	

(Η f κοίλη στα $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$)

(Η f κυρτή στο $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$)

(Σημεία καμπής τα $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$)

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

Σημεία καμπής τα $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$

Θέσαμε $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ διότι η f άρτια

Β3.

Οριζόντια ασύμπτωτη όταν $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \Rightarrow$$

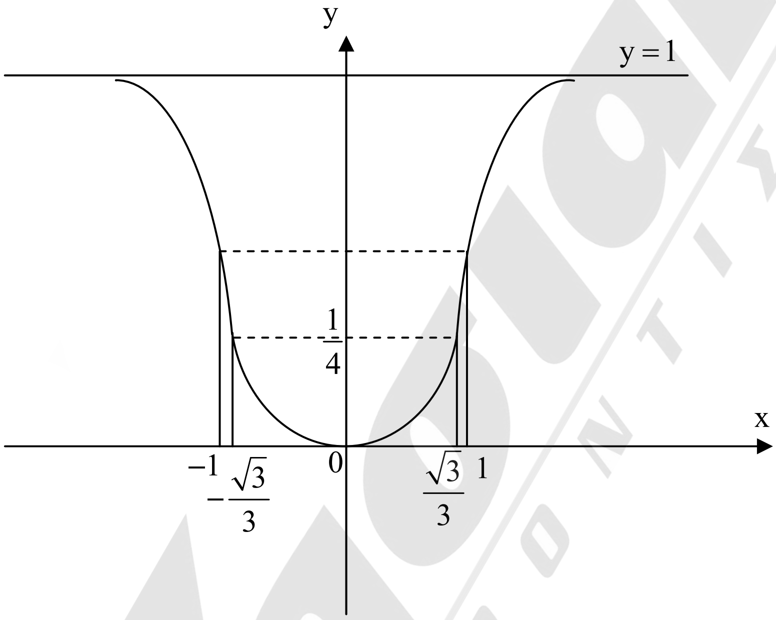
Η ευθεία (ε): $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Ομοίως, όταν $x \to -\infty$, οριζόντια ασύμπτωτη η ίδια ευθεία (ε): $y=1$, διότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$ (φυσικά δεν έχει πλάγια στο $-\infty$)

Κατακόρυφη ασύμπτωτη δεν υπάρχει διότι δεν υπάρχει $x_0 \in D_f = R$ στο οποίο $\lim\limits_{x\to x_0}$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^-}$ να ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$ δηλαδή δεν υπάρχει σημείο ασυνέχειας ή σημείο x_0 που είναι άκρο ανοιχτού υποδιαστήματος του R (το οποίο x_0 να ανήκει στο R)

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, θέτω $x^2 = u$, τότε $e^u - u - 1 = 0$.

Έστω $g(u) = e^u - u - 1$, $g'(u) = e^u - 1$

$g'(u) = 0 \Leftrightarrow e^u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Για $u < 0 \Rightarrow e^u < e^0 \Leftrightarrow e^u < 1 \Leftrightarrow e^u - 1 < 0 \Leftrightarrow g'(u) < 0$

Για $u > 0 \Rightarrow e^u > e^0 \Leftrightarrow e^u > 1 \Leftrightarrow e^u - 1 > 0 \Leftrightarrow g'(u) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	↘		↗
		Ο.Ε.	

Για $u=0$ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=e^0-0-1=0$

Άρα $g(u)\geq 0\ \ \forall u\in R$

Η συνάρτηση g είναι θετική για κάθε $u\in R$ και μηδενίζεται μόνο για $u=0$. Άρα η ρίζα $u=0$ μοναδική λύση της g.

Γ2.

Οι f συνεχείς συναρτήσεις, $f:R\to R$

$f(x)^2=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2=\left(g(x)\right)^2$ για κάθε $x\in R$

$\sqrt{f(x)^2}=\sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2}=\sqrt{\left(g(x)\right)^2}$ για κάθε $x\in R$

$|f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$ για κάθε $x\in R$

i) αν $f(x)\geq 0\Rightarrow f(x)=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\ \forall x\in R$

$\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$ για κάθε $x>0$ και επειδή είναι συνεχής για $x\geq 0$

$\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\geq 0$ (1)

$f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)>0$, για κάθε $x<0$ (2)

$(1),(2)\ \ f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 & ,\ x\geq 0\\ -e^{x^2}+x^2+1 & ,\ x<0\end{cases}$

ii) αν $f(x)\leq 0\Rightarrow -f(x)=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\ \forall x\in R$

$\Rightarrow f(x)=-\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$ για κάθε $x\in R$

$\Rightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$, για $x>0$ και λόγω συνέχειας

$\Rightarrow f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$ για $x\geq 0$ (3)

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, για $x<0$ και λόγω συνέχειας

$\Rightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$ για κάθε $x\leq 0$ (4)

$(3),(4)\ \ f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 & ,\ x<0\\ -e^{x^2}+x^2+1 & ,\ x\geq 0\end{cases}$

Γ3.

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R$

$f'(x)=2xe^{x^2}-2x$

$f''(x)=2e^{x^2}+2x\cdot e^{x^2}\cdot 2x-2=2e^{x^2}+4x^2e^{x}-2$

$f'''(\ \ )=2e^{x^2}\cdot 2x+4\left(2xe^{x^2}+x^2e^{x}\cdot 2x\right)=4xe^{x^2}+8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=12xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=$

$=4xe^{x^2}\left(3+2x^2\right)$

Αλλά $e^{x^2}>0$, $2x^2+3>0$ για κάθε $x\in R$

Άρα για $x>0\Rightarrow f'''(x)>0\Rightarrow f''\nearrow$

για $x<0 \Rightarrow f'''(x)<0 \Rightarrow f'' \searrow$

Άρα για $x>0 \overset{f''\nearrow}{\Rightarrow} f'''(x)>f''(0)$ όπου $f''(0)=0$

για $x<0 \overset{f''\searrow}{\Rightarrow} f''(x)>f''(0)$

Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και η f κυρτή

Γ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi'(x)=f(x+3)-f(x)$

$\Phi'(x)=f'(x+3)(x+3)'-f'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0$ διότι

$x+3>x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x+3)>f'(x) \Rightarrow f'(x+3)-f'(x)>0$, άρα $\Phi'(x)>0 \Rightarrow \Phi\nearrow$

Αλλά $\Phi(|\eta\mu x|)=f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)$

Άρα η δοθείσα γράφεται $\Phi(|\eta\mu x|)=\Phi(x) \overset{\Phi\nearrow}{\Rightarrow} |\eta\mu x|=x$ για $x\geq 0$, άρα $x=0$

ΘΕΜΑ Δ

$D_f=R$

Δ1. f'' συνεχής

$$\int_0^\pi \left(f(x)\eta\mu x+f''(x)\cdot\eta\mu x\right)dx=\pi$$

$$\int_0^\pi \left(f(x)\eta\mu x+\left(f'(x)\right)'\cdot\eta\mu x\right)dx=\pi$$

$$\underbrace{\int_0^\pi \left(f(x)\eta\mu x\right)dx}_{A}+\int_0^\pi \left(\left(f'(x)\right)'\cdot\eta\mu x\right)dx=\pi$$

$$A+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi \left(f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\pi$$

$$A+\left(f'(\pi)\cdot\eta\mu\pi-f'(0)\cdot\eta\mu 0\right)-\int_0^\pi \left(f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\pi$$

$$A-0-\int_0^\pi \left(f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\pi$$

$$A-\left[f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi+\int_0^\pi \left(f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'\right)dx=\pi$$

$$A-\left(f(\pi)\cdot\sigma\upsilon\nu\pi-f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0\right)+\int_0^\pi \left(f(x)\cdot(-\eta\mu x)\right)dx=\pi$$

$$A-\left(f(\pi)\cdot(-1)-f(0)\cdot 1\right)-A=\pi \Leftrightarrow$$

$$-\left(-f(\pi)-f(0)\right)=\pi \Leftrightarrow f(\pi)-f(0)=\pi \quad (1)$$

Έστω $\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x\cdot g(x)$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot g(x)\right)=0\cdot g(0)=0\cdot 1=0 \overset{f \text{ συνεχής}}{\Rightarrow} f(0)=0 \quad (2)$$

$$(1),(2) \to f(\pi)-0=\pi \Leftrightarrow f(\pi)=\pi$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 1=1$$

Δ2.

i) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x = x_0$, τότε πρέπει $f'(x_0) = 0$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$

$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x$ για $x = 0$

για $x = x_0 \Rightarrow e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \overset{f'(x_0)=0}{\Rightarrow}$

$e^{f(x_0)} \cdot 0 + 1 = f'(f(x_0)) \cdot 0 + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Άρα $f'(0) = 0$, άτοπο διότι $f'(0) = 1$, άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R

ii) Επειδή $f'(0) = 1 \neq 0$ άρα η f' δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του x, επομένως η f' συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αλλά $f'(0) = 1 > 0$

Άρα $f'(x) > 0 \ \forall x \in R$ τότε $f \nearrow \forall x \in R$

Δ3.

$-1 \leq ημx \leq 1$

$-1 \leq συνx \leq 1$

$-2 \leq ημx + συνx \leq 2$, όπου $f \nearrow$

Επίσης $f(\pi) = \pi$

Άρα $f(x) > 0$, $\dfrac{-2}{f(x)} \leq \dfrac{ημx + συνx}{f(x)} \leq \dfrac{2}{f(x)} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{f(x)}\right) \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{ημx + συνx}{f(x)} \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}$$

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in R$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)} - f(f(x))\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x - x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[e^{f(x)} - f(f(x))\right] = e^{\ell} - f(\ell) = κ \in R$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)\right] = +\infty \text{ διότι } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, άρα $κ = +\infty$, άτοπο

τότε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{f(x)} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{f(x)} = 0$

Από κριτήριο παρεμβολής, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ημx + συνx}{f(x)} = 0$

Δ4.

$\displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$, θέτω $\ln x = y \Rightarrow x = e^y \Rightarrow dx = e^y dy$

Για τα νέα άκρα : για $x = 1 \Rightarrow \ln 1 = y \Leftrightarrow y = 0$

Για $x = e^\pi \Rightarrow \ln e^\pi = y \Leftrightarrow y = \pi$

Άρα $\int_0^\pi \frac{f(y)}{e^y} \cdot e^y dy = \int_0^\pi f(y)dy$

Αλλά για $0 \le y \le \pi \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0) \le f(y) \le f(\pi) \Leftrightarrow 0 \le f(y) \le \pi \Rightarrow$

$\int_0^\pi 0dy < \int_0^\pi f(y)dy < \int_0^\pi \pi dy$

$0 < \int_0^\pi f(y)dy < \pi(\pi - 0)$

Άρα $0 < \int_0^\pi f(y)dy < \pi^2$

$0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$

Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **Μονάδες 7**

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; **Μονάδες 4**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. **Μονάδες 9**

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 4**

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$$

όταν $x \in [0, +\infty)$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right)\eta\mu x \, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f\left(f(x)\right) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ (μονάδες 4) και $f'(0) = 1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι $\displaystyle 0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\big(f(x)+f''(x)\big)ημx\,dx = π$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\big(f(x)\big)+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(π) = π$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx+συνx}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{π}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<π^2$. **Μονάδες 6**

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ